**Редици на Грей**

1. **Нужни пояснения**

Името на Франк Грей е тясно свързано с тези на Хамилтън и Хеминг и именно затова е невъзможно Кодът, респективно редиците на Грей да бъдат обяснени без Хамилтоновия цикъл и Разстоянието по Хеминг. Хиперкуб.

1. Хамилтонов цикъл (ХЦ) в граф се нарича цикъл, съдържащ всеки връх от графа точно веднъж. Граф, съдържащ такъв цикъл, се нарича Хамилтонов.
2. Разстояние по Хеминг –

Дефиниция 1. Нека Fq = {0; 1; : : : ; q-1} и x; y ∈ . Броят на позициите, в които думите x и y се различават, се нарича разстояние (по Хеминг) между x и y и се означава с d(x, y), т.е.

d(x, y) = |{i|xi ≠yi}|;

където x = x1, x2 . . ., xn и y = y1,y2 . . . , yn.

От Дефиниция 1 следва, че d(x, y) е цяло неотрицателно число, което не надминава n, т.е.

0 ≤ d(x; y) ≤ n.

Теорема 1. Функцията d(x, y) притежава свойствата за функция-разстояние:

(1) d(x, y) = 0 ⬄ x = y;

(2) d(x,y) = d(y, x) ∀x, y ∈ Fq (симетричност);

(3) d(x, y) ≤ d(x, z) + d(z, y) ∀x, y, z ∈ Fq (неравенство на триъгълника).

Доказателство: (1) и (2) са очевидни. За доказателството на (3) е достатъчно да забележим, че числото d(x,y) е равно на минималния брой промени на координати, които са необходими за трансформиране на x в y. Този брой не може да бъде намален, ако първо трансформираме x в z и след това z в y, а последното е точно d(x, z) + d(z,y).

Пример 1.

Ако x = 0001101010 и y = 1001011000 са думи от , то d(x, y) = 5, защото x и y се различават в 5 позиции (първата, четвъртата, петата, шестата и деветата)..

Дефиниция 2. Ако x = x1,x2 . . . , xn ∈ , то броят на ненулевите символи на x се нарича

тегло на x и се бележи с wt(x), т.е.

wt(x) = |{i|xi ≠ 0} .

Ако означим 0 = 00 . . . 0 ∈ , от Дефиниции 1 и 2 следва, че за всяка дума x ∈ имаме d(x, 0) = wt(x).

Дефиниция 3. Означаваме Jq = {0, …, q-1}

Нека ℕ = {x∈ℤ | x ≥ 0}

Полагаме векторите:

* α = (a1, …, an), ai∈Jq, i = 1, …, n; т.е. α∈Jqn.
* β = (b1, …, bn), bi∈Jq, i = 1, …, n; т.е. β∈Jqn

Разстоянието по Хеминг е функция ρ: Jqn x Jqn → ℕ, където ρ(α, β) е броят на различаващите се компоненти на векторите α и β.

Чрез него дефинираме и **тегло на вектор** wt(α) = ρ(ō, α), където ō е нулевия вектор (вектор, на когото всичките компоненти са 0). Бележи се още ||α|| и означава броят на ненулевите компоненти на вектора α.

1. Хиперкуб
2. В геометрията хиперкуб е *n*-мерен аналог на квадрата (*n*=2) и куба (*n*=3). Представлява затворен изпъкнал геометричен обект, състоящ се от взаимно перпендикулярни във всяко от *n*-те му измерения елементи от първа до (n-1)-ва размерност (отсечки, равнини и пространства).
3. Алгебричната му дефиниция е следната: хиперкуб с дължина на страната 2*a* и център в точката (*ξ1,ξ2,...,ξn*) се състои от всички точки, които удовлетворяват неравенството *|xi - ξi| ≤ a , i = 1,2,...,n*.
4. В Информатиката – Свързаният неориентиран граф с 2n върха, в който степента на всеки връх е точно n и между всеки два върха съществува път с дължина най-много n, G се нарича n-мерен двоичен куб.
5. **Двоичен код**

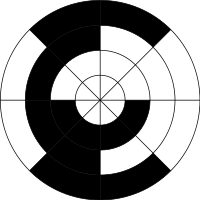
* Видове двоични кодове:

1. Естествен код - Той спада към [позиционните кодове](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%BE%D0%B7%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%BD_%D0%BA%D0%BE%D0%B4&action=edit&redlink=1), на които [теглото на всеки бит](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D0%B5%D0%B3%D0%BB%D0%BE_%D0%BD%D0%B0_%D0%B1%D0%B8%D1%82&action=edit&redlink=1) се определя от неговата позиция в [кодовата дума](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%B4%D1%83%D0%BC%D0%B0&action=edit&redlink=1). Всички битове, които имат еднакво разположение, са с едно и също тегло. Условният номер на всяко ниво на [квантоване](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B5&action=edit&redlink=1" \o "Квантоване (страницата не съществува)) представлява сумата на всички тегла на битовете в кодираната дума. Свойството за [еднаквост](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%95%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82&action=edit&redlink=1) на теглата за битовете с еднакви [местоположения](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5&action=edit&redlink=1) е предимството на естествения код, тъй като позволява лесно и с висока [точност](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82&action=edit&redlink=1) да се декодира предадената чрез кодовите думи [информация](http://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F). Основен недостатък на този код са сравнително големите [грешки](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%93%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%BA%D0%B0&action=edit&redlink=1), които се получават при кодиране на сигнал с големи [колебания](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5&action=edit&redlink=1) на [моментните стойности](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82&action=edit&redlink=1). Този код се използва за кодиране на [еднополярни сигнали](http://bg.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%95%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%B8_%D1%81%D0%B8%D0%B3%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8&action=edit&redlink=1).
2. Код на Грей - Кодът на Грей е наричан още код с [разстояние на Хеминг](http://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%8F%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BD%D0%B0_%D0%A5%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%B3) 1 ("single-distance code"). При този код всеки две съседни кодови думи се различават само по 1 бит, като се стремим да променяме най-малкия значещ бит. Това позволява значително да се намали грешката при кодиране на сигнали. Недостатък на този код е, че той не е тегловен, поради което възниква трудност при декодирането. Използва се за кодиране на [телевизионни](http://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D1%8F) сигнали.
3. Код на Хеминг - С този код може да се извършва проверка за наличие и корекция на единична грешка. За да може да се извърши проверка, е необходимо да се дефинират отделните видове разреди и мястото на контролните разреди. Проверката за наличие на грешка се извършва въз основа на броя на съдържащите се в кодиращите нива единици. Изискването е броят на единиците при извършване на проверката да бъде четно число. Ако това е така, коефициентът, който участва в проверката, е със стойност 0. В противен случай коефициентът е 1.
4. **Код на Грей**

**Огледалният двоичен код**, известен още като **двоично-реверсивен код**, **позиционен код** или **код на Грей**, е вид двоичен код, в който при преминаването между две съседни стойности се променя само една цифра, т.е. има разстояние на Хеминг единица.

Пример: осемте стойности на 3-разреден огледален двоичен код са 000 → 001 → 011 → 010 → 110 → 111 → 101 → 100.

Интересно свойство на кода на Грей е неговата цикличност - първият елемент на редицата може да бъде поставен след последния и така се образува цикъл. Това свойство е съвсем естествено, като се има предвид, че n-разреден код на Грей описва Хамилтонов цикъл в n-мерния булев куб. Последното е естествено, тъй като кодът на Грей съдържа по веднъж всички n-разредни двоични вектори (които са всички върхове на n-мерния булев куб), като съседните са на разстояние на Хеминг единица (както и съседните върхове в куба).

[](http://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Encoder_Disc_(3-Bit).svg)

Диаграма на контактите на 8-позиционен ъглов датчик

Първоначалното име „огледален“ показва поведението на младшите разреди спрямо средата - във втората половина от кодовите значения разредите повтарят стойностите си от първата половина в обратен (огледален) ред. Това е видно от примера: ако се махне само най-старшия разряд, стойностите от първата половина при старши разряд 0 (00 → 01 → 11 → 10) се повтарят във втората при разряд 1 в обратен ред (10 → 11 → 01 → 00). Ако се махнат два разреда, симетрията се повтаря два пъти - (0 → 1 / 1 → 0).

Името „позиционен“ е следствие от употребата на кода за премахване на смущенията в електро-механичните ъглови позиционни датчици. Френският инженер Емил Бодо създава такива датчици през 1878 г. За направеното от него подобрение на телеграфните апарати, той получава Ордена на почетния легион. Това име има тясно разпространение и не трябва да се бърка с математическото понятие позиционен код - произволен код, в който една и съща цифра има различен смисъл в зависимост от позицията си.

Името „код на Грей“ първоначално се появява в САЩ благодарение на патента получен от Франк Грей от лабораториите Бел през 1953 г. за приемник на сигнали в огледален двоичен код. Въпреки неточността името се разпространява и в други страни.

Основното предимство на кода е единичната промяна между последователните стойности. При кодовете, основани на двоичната бройна система, всеки преход от нечетно към по-голямо четно число (или обратно) може да създаде неверни междинни стойности. Пример: при преход от 5(10)=101(2) към 6(10)=110(2) е възможно двете последни цифри да се променят неедновременно и за кратко да се появи междинна стойност 4(10)=100(2) или 7(10)=111(2). При преходите с промяна на повече цифри е възможно дори да се мине през няколко междинни стойности.

Друго предимство е „цикличността“ на кода - последното значение във всяка огледално-двоична последователност е винаги от вида 100…0 и с промяна на единицата се връща до изходна стойност.

Конструирането е индуктивно и следва принципите на индукцията:

1. Едно-разредния код 0, 1 е код на Грей
2. Ако имаме построен (n-1)-разредния код на Грей построяваме n-разредния като записваме (n-1)-разредния и след края му го записваме отново в обратен ред. В ново-получената редица добавяме пред всеки елемент от първата половина 0, а пред всеки от втората половина - 1.

Пример:

* 1-разреден: 0, 1
* 2-разреден: \_0, \_1; \_1, \_0 и добавяме - 00, 01; 11, 10
* 3-разреден: \_00, \_01, \_11, \_10; \_10, \_11, \_01, \_00 и добавяме - 000, 001, 011, 010; 110, 111, 101, 100